



Université Claude Bernard



DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **15 octobre 2021**

Nom de famille et prénom de l'auteur : **Monsieur HUANG Chih-Kang**

Titre de la thèse : « *Questions d'approximation et de compacité pour des problèmes variationnels géométriques* »

Résumé



Structure de la thèse

Cette thèse se divise en deux parties. La première partie comportant quatre chapitres est consacrée à l'étude de l'approximation par méthode de champ de phase du flot de courbure moyenne et du flot de Willmore. La deuxième partie porte sur l'analyse asymptotique des petites sphères de Willmore plongées dans une variété riemannienne de dimension 3, elle comporte le chapitre 5 suivi d'une annexe.

1 De l'approximation champ de phase du flot de Willmore au flot de courbure moyenne approché avec auto-évitement

La première partie de notre travail porte sur l'approximation de l'énergie de Willmore par des modèles dits de "champ de phase". De Giorgi [DG91], Bellettini et Paolini [BP93] ont d'abord proposé un modèle d'approximation de l'énergie de Willmore. Dans l'espace euclidien de dimension 2 et 3, à une constante multiplicative près, ce modèle converge bien vers la fonctionnelle de Willmore (au sens de la Γ -convergence) sur les surfaces C^2 (la convergence Γ -lim sup a été montrée par Bellettini & Paolini [BP93] puis la convergence Γ -lim inf a été montrée par Röger & Schätzle [RS06]). Par ailleurs, en tenant compte de la caractéristique d'Euler, Mugnai [Mug13] a proposé un autre modèle qui généralise le résultat de la Γ -convergence à des courbes moins régulières en espace de dimension 2.

Dans le chapitre 2, on présente quelques résultats portant sur l'analyse du flot de De Giorgi Bellettini-Paolini : en utilisant la technique de minimisation à temps discret, on montre l'existence et l'unicité du flot en supposant que, au temps initial, les lignes de niveaux ne peuvent rencontrer le bord que tangentiellement. Nous étudions également une méthode de splitting pour définir un schéma d'approximation numérique du flot de De Giorgi-Bellettini-Paolini. Le principe est d'écrire l'énergie comme somme d'une fonctionnelle convexe et d'une fonctionnelle semi-concave. Le schéma, qui consiste à résoudre la partie convexe implicitement et à résoudre la partie semi-concave explicitement, est *énergétiquement stable*.

Quant à la convergence du flot de De Giorgi-Bellettini-Paolini vers le flot de Willmore, des réponses partielles ont d'abord été apportées par Loreti et March [LM00] à l'aide des techniques formelles de développement asymptotique raccordé. Fei et Liu [FL19] ont donné très récemment une justification rigoureuse de la convergence du flot de De Giorgi-Bellettini-Paolini qui nécessite une adaptation délicate des travaux de Alikakos, Bates & Chen [ABC94]-[Che94] sur l'étude de la convergence de l'équation de Cahn-Hilliard vers le modèle Hele-Shaw. Ils montrent ainsi que le flot De Giorgi Bellettini-Paolini converge vers le flot géométrique tant qu'il n'y a pas apparition de singularités. On s'intéresse ensuite dans le chapitre 3 de la thèse au problème de l'apparition de singularités avec le flot De Giorgi-Bellettini-Paolini et à la recherche d'une modification de l'énergie pour l'éviter ce problème. Les travaux de Bretin, Masnou, & Oudet [BMO15] sur le modèle d'approximation de Mugnai suggère qu'il est possible de modifier le flot De Giorgi-Bellettini-Paolini en y ajoutant un terme perturbatif agissant sur le champ normal de façon à éviter la création de points de singularité. On démontre que ce terme supplémentaire est négligeable tant que les lignes de niveaux sont régulières mais qu'il est susceptible de donner une force répulsive autour des points-

selle ce qui empêche les lignes de niveaux de fusionner. Nous montrons en particulier que le terme de saut converge vers une mesure portée par l'ensemble singulier d'un champ normal associé aux formes étudiées. On déduit de plusieurs analyses asymptotiques et de simulations numériques une conjecture faisant apparaître à des ordres variés les sous-ensembles de dimensions variées de l'ensemble singulier. Dans le chapitre 4, nous introduisons dans l'équation d'Allen-Cahn un terme supplémentaire dit de *saut* caractérisant le squelette de l'interface, ce qui nous donne un flot par courbure moyenne *sous obstacle quasi-statique* dont l'obstruction est définie par le squelette de l'interface à un moment donné. Ce nouveau flot est particulièrement adapté pour obtenir des approximations numériques de solutions du problème de Steiner en dimension 3, qui est un problème particulièrement difficile. Il est également très adapté pour résoudre numériquement le problème de Plateau et permet d'obtenir des surfaces minimales aussi bien orientables que non orientables.

2 Analyse asymptotique pour les sphères de Willmore dans une variété tri-dimensionnelle

L'étude des surfaces de Willmore dans les espaces courbes est relativement récente, et plusieurs résultats d'existence et non-existence ont été prouvés depuis peu. En particulier, des petites sphères de Willmore ont été construites comme étant des sphères géodésiques perturbées, obtenues respectivement par Lamm & Metzger [LM13], Mondino [Mon10]-[Mon13], Lamm, Metzger & Schulze [LMS11] et Chen & Li [CL14]. Toutes ces constructions reposent sur le théorème des fonctions implicites, où certaines non-dégénérescences de la variété ambiante sont requises, notamment dans un voisinage d'un point critique de la courbure scalaire. Réciproquement, on se ramène naturellement à la question suivante:

Soit p un point dans une variété tri-dimensionnelle (M, h) . Supposons que, pour $r > 0$ suffisamment petit, la boule géodésique $B_r^h(p)$ contient une surface de Willmore (ou plus généralement une surface de Willmore sous contrainte d'aire), alors p est-il essentiellement un point critique de la courbure scalaire de (M, h) ?

Lamm et Metzger ont d'abord montré que ce phénomène de concentration apparaît si on ne considère que les surfaces de Willmore de courbure moyenne positive dans leur travail pionnier [LM10]. D'une manière équivalente, un tel phénomène de concentration a lieu pour les surfaces de Willmore d'énergie inférieure à $4\pi + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Dans [LM14], Laurain et Mondino ont ensuite généralisé ce résultat lorsque la borne d'énergie est inférieure à $8\pi - \delta$ pour tout $\delta > 0$. Plus précisément, ils montrent que [Laurain-Mondino [LM14]] Soient (M, h) une variété riemannienne de dimension 3 et $(\Phi^k(S^2))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de sphères de Willmore (éventuellement sous contrainte d'aire) dans M vérifiant:

1. $\text{diam}(\Phi^k(S^2)) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$;
2. Les énergies de Willmore de $\Phi^k(S^2)$ sont uniformément bornées par $8\pi - \delta$.

Alors, à une extraction près, la suite $(\Phi^k(S^2))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un point critique p de la courbure scalaire de (M, h) . Notons que, grâce à l'inégalité de Li-Yau dans [LY82], seules les sphères de Willmore plongées se produisent sous ces hypothèses.

L'objectif de la seconde partie de la thèse consiste à écrire des éléments de la preuve qui pourrait s'adapter au cas général pour un seuil d'énergie quelconque. Quitte à faire un changement d'échelle approprié autour du point p , nous étudions ici le cas particulier où les surfaces limites peuvent être asymptotiquement vues comme deux sphères euclidiennes qui se collent l'une à l'autre. Nous présentons comment obtenir des estimées ponctuelles fortes pour la suite $(\Phi^k)_{k \in \mathbb{N}}$ en appliquant la technique développée par Druet, Hebey & Robert [DHR03] au système triple d'équations vérifiées par les surfaces de Willmore dont l'une est la reformulation de Rivière sous forme divergence et les deux autres sont celles données par la conformité de paramétrage des surfaces. Ces trois équations sont des EDPs elliptiques avec des termes non-linéaires dominants sous forme de Wentz. En étudiant soigneusement le recollement entre les deux sphères et en adaptant la méthode utilisée par Laurain [Lau12] pour les surfaces à courbure moyenne constante, on montre que, à l'aide des estimées fortes, ces sphères de Willmore doivent se concentrer en un point critique de la courbure scalaire de (M, h) .

References

- [ABC94] Nicholas D. Alikakos, Peter W. Bates, and Xinfu Chen. Convergence of the Cahn-Hilliard equation to the Hele-Shaw model. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 128(2):165–205, 1994.
- [BMO15] Elie Bretin, Simon Masnou, and Édouard Oudet. Phase-field approximations of the Willmore functional and flow. *Numer. Math.*, 131(1):115–171, 2015.
- [BP93] G. Bellettini and M. Paolini. Approssimazione variazionale di funzionali con curvatura. In *Seminario Analisi Matematica, Univ. Bologna*, pages 87–97, 1993.
- [Che94] Xinfu Chen. Spectrum for the Allen-Cahn, Cahn-Hilliard, and phase-field equations for generic interfaces. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(7-8):1371–1395, 1994.
- [CL14] Jingyi Chen and Yuxiang Li. Bubble tree of branched conformal immersions and applications to the Willmore functional. *Amer. J. Math.*, 136(4):1107–1154, 2014.

- [DG91] Ennio De Giorgi. Some remarks on Γ -convergence and least squares method. In *Compos ite media and homogenization theory (Trieste, 1990)*, volume 5 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 135–142. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.
- [DHR03] Olivier Druet, Emmanuel Hebey, and Frédéric Robert. A C^0 -theory for the blow-up of second order elliptic equations of critical Sobolev growth. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 9:19–25, 2003.
- [FL19] Mingwen Fei and Yuning Liu. Sharp interface limit of a phase field model for elastic bending energy, 2019.
- [Lau12] Paul Laurain. Concentration of CMC surfaces in a 3-manifold. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (24):5585–5649, 2012.
- [LM00] P. Loreti and R. March. Propagation of fronts in a nonlinear fourth order equation. *European J. Appl. Math.*, 11(2):203–213, 2000.
- [LM10] Tobias Lamm and Jan Metzger. Small surfaces of Willmore type in Riemannian manifolds. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19):3786–3813, 2010.
- [LM13] Tobias Lamm and Jan Metzger. Minimizers of the Willmore functional with a small area constraint. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 30(3):497–518, 2013.
- [LM14] Paul Laurain and Andrea Mondino. Concentration of small Willmore spheres in Riemannian 3-manifolds. *Anal. PDE*, 7(8):1901–1921, 2014.
- [LMS11] Tobias Lamm, Jan Metzger, and Felix Schulze. Foliations of asymptotically flat manifolds by surfaces of Willmore type. *Math. Ann.*, 350(1):1–78, 2011.
- [LY82] Peter Li and Shing Tung Yau. A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. *Invent. Math.*, 69(2):269–291, 1982.
- [Mon10] Andrea Mondino. Some results about the existence of critical points for the Willmore functional. *Math. Z.*, 266(3):583–622, 2010.
- [Mon13] Andrea Mondino. The conformal Willmore functional: a perturbative approach. *J. Geom. Anal.*, 23(2):764–811, 2013.
- [Mug13] Luca Mugnai. Gamma-convergence results for phase-field approximations of the 2D-Euler elastica functional. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 19(3):740–753, 2013.
- [RS06] Matthias Röger and Reiner Schätzle. On a modified conjecture of De Giorgi. *Math. Z.*, 254(4):675–714, 2006.