DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **21 juin 2021**

Nom de famille et prénom de l'auteur : **Monsieur JAHEL Colin**

Titre de la thèse : « *Des progrès sur le problème d'unique ergodicité* »

Résumé

Mon travail se concentre sur une notion de dynamique des groupes topologiques qui spécialise la notion de moyennabilité, appelée unique ergodicité, et qui se définit comme suit :

Définition :Un groupe G est dit uniquement ergodique si tout G-flot minimal est le support d'une unique mesure invariante.

Ci-dessus, un flot est une action continue d'un groupe topologique sur un espace compact. Un flot est dit minimal lorsque l'orbite de chaque point est dense. De manière équivalente, un flot est minimal lorsqu'il n'admet pas de sous-flot propre. On peut facilement prouver, à l'aide du Lemme de Zorn, que tout flot admet un sous-flot minimal.

Il est à noter que la notion d'unique ergodicité se réfère généralement à une action plutôt qu'à un groupe. Une action est uniquement ergodique lorsqu'elle n'admet qu'une mesure invariante.

Pour des exemples de groupes uniquement ergodiques, on peut tout d'abord se tourner vers les groupes compacts : en utilisant l'unicité la mesure de Haar, on peut facilement montrer que tous les groupes compacts sont uniquement ergodiques. En revanche, lorsqu'on s'intéresse aux groupes polonais localement compacts mais non-compacts, la situation change radicalement :

Théorème : Les groupes polonais localement compacts non-compacts ne sont jamais uniquement ergodiques.

Ce théorème est un des principaux résultats du Chapitre 6. Trouver des groupes uniquement ergodiques intéressants nécessite donc de se tourner vers des groupes plus gros, c'est-à-dire non-localement compacts. Le premier exemple d'un tel groupe est dû à Glasner et Weiss en 2002, il s'agit de S_∞, le groupe de permutations des entiers, muni de la topologie de convergence simple. C'est ensuite en 2012 qu'Angel, Kechris et Lyons montrent que plusieurs sous-groupes fermés de S_∞ possèdent également cette propriété. Leur méthode, qui est essentiellement de nature combinatoire, s'appuie largement sur le fait que les sous-groupes fermés de S_∞ peuvent être réalisés en tant que groupes d'automorphismes de certaines structures dénombrables dites homogènes, où tout isomorphisme entre sous-structures finies peut être étendu en un automorphisme global.

L'approche d'Angel, Kechris et Lyons repose également sur l'étude d'un flot particulier : le flot minimal universel d'un groupe. Ellis a montré en 1966 que tout groupe topologique G admet un unique flot minimal universel $M(G)$, c'est-à-dire un flot minimal qui se surjecte de manière G-équivariante sur tout autre flot minimal.

Angel, Kechris et Lyons ont démontré une caractérisation utile de l'unique ergodicité:
Théorème : Un groupe G est uniquement ergodique ssi $M(G)$ n'a qu'une seule mesure G-invariante.

Ce théorème est aussi la base de mes travaux : à l'aide d'une description efficace du flot minimal universel, on peut obtenir des résultats d'unique ergodicité. Le premier exemple d'un tel résultat se trouve dans le chapitre 3 :

Théorème : Soit H,K,G des groupes polonais tels que

$1 \to H \to G \to K \to 1$
est une suite exacte.

Si $M(H)$ et $M(K)$ sont métrisables, alors $M(G)$ l'est aussi. Si de plus H et K sont uniquement ergodiques, G l'est aussi.

Le chapitre 4 quant à lui s'intéresse aux mesures invariantes de certaines actions de groupes d'automorphismes de structures homogènes. On y montre en particulier le résultat suivant:

Théorème :Soit F une structure homogène ω-catégorique, éliminant faiblement les imaginaires, sans algébricité et transitive. L'une des deux conclusions suivantes est vraie:
1) F admet un ordre définissable.
2) L'action de $Aut(F)$ sur $LO(F)$ est uniquement ergodique.

Ce théorème a plusieurs implications intéressantes, il permet entre autres de retrouver de nombreux résultats d'unique ergodicité de groupes (et en donne de nouveaux). Il permet aussi de montrer que certains groupes ne sont pas moyennables, ou encore de faire apparaître des propriétés combinatoires dans certains cas.

Enfin les chapitres 2 et 5 s'intéressent chacun à l'étude de l'unique ergodicité de groupes de structures bien particulières.

Le chapitre 2 s'intéresse au 2-graphe, un hypergraphe aux propriétés combinatoires particulières, qui rendent le flot minimal universel de son groupe d'automorphismes singulier parmi les flots minimaux universels connus. Je présente dans ce chapitre la méthode combinatoire d'Angel, Kechris et Lyons pour prouver l'unique ergodicité. Le lecteur trouvera une autre preuve, celle-ci dynamique, à la fin du chapitre 4.

Enfin le chapitre 2 traite l'unique ergodicité du groupe d'automorphismes du graphe semigénérique. Il s'agit de premier de mes résultats de thèse et repose sur une étude dynamique et combinatoire du graphe semigénérique, pour laquelle la méthode d'Angel, Kechris et Lyons ne s'applique pas, et où il a donc fallu développer une stratégie nouvelle.

Lien vers le manuscript : http://math.univ-lyon1.fr/~jahel/doc/These.pdf