DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT

(Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : décembre 2019

Nom de famille et prénom de l'auteur : **WOJCIK Caius**

Titre de la thèse : «*Factorisations des mots de basse complexité*».

Résumé

Mon travail de thèse, fait en un peu plus de deux ans à l'université Lyon 1, sous la direction de Luca Zamboni et Boris Adamczewski, concerne la combinatoire des mots et ses aspects diophantiens, dynamiques et arithmétiques. Ce doctorat contient deux travaux, l'un concernant les liens entre la théorie de Ramsey et la combinatoire des mots, et l'autre étudiant le système de numération d'Ostrowski d'un point de vue formel à l'aide des mots Sturmiens.

Contribution « Factorisations monochromatiques et périodicité »

La première partie de ce doctorat concerne le problème de déterminer si, étant donné un mot infini x non-périodique, il existe une coloration de ses facteurs telle qu'il n'admette pas de factorisation monochromatique. Nous répondons de manière complète et optimale à cette problématique par le théorème suivant, principal résultat de cette partie de la thèse :

Théorème 13 (Théorème de la factorisation monochromatique, W., Zamboni)**.** *Soit*
A *x un mot infini sur un alphabet quelconque. Alors x est périodique si et seulement si, pour toute coloration de ses facteurs, il admet une factorisation monochromatique.*

Notre construction fournit aussi le nombre optimal de couleurs pouvant être utilisées pour répondre à cette problématique. Ce problème, introduit indépendemment par T. Brown et L. Zamboni, est resté une conjecture pendant plus de dix ans. Ce type de résultats montre les limites de la théorie de Ramsey dans le contexte de la combinatoire des mots, en effet une application classique du théorème de Ramsey montre que pour tout mot infini x et toute coloration de ses facteurs, il admet un suffixe ayant une factorisation monochromatique, dont en plus toutes les concaténations de termes juxtaposés sont encore monochromatiques.

La résolution de ce problème fait intervenir l'ordre lexicographique, et amène donc naturellement la considération des mots de Lyndon, pour lesquels on montre qu'ils n'admettent pas de factorisation monochromatique pour la coloration préfixiale. Durant cette recherche, nous introduisons la notion de mots dont l'orbite est de Lyndon, définis comme les mots infinis x tels que, pour tout suffixe de x, il existe un ordre total sur l'alphabet pour lequel ce suffixe soit de Lyndon. Nous démontrons alors le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit x un mot infini sur un alphabet* $\mathbb{A}$ *dont l'orbite est de Lyndon. Alors l'alphabet* $\mathbb{A}$ *est infini.*

Nous produisons aussi un exemple non-trivial de tel mot, donné par le mot de Zimin, défini sur l'alphabet infini $\mathbb{A} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ et dont le n-ième terme est donné par $x_{val_2(n)+1}$ où val_2 désigne la valuation 2-adique. Nous étudions la structure de l'ensemble de ses facteurs, et nous montrons entre autre que les mots bi-infinis partageant le même ensemble de facteurs que le mot de Zimin sont en bijection naturelle avec les classes non-nulles de nombres 2-adiques modulo l'ensemble des entiers relatifs (ici, T désigne l'opérateur de décalage sur les mots infinis) :

Théorème 14. *Tout élément de l'orbite dynamique du mot de Zimin Z s'écrit de manière unique sous la forme*

$$T^{\gamma}(Z)$$

où γ est un nombre 2-adique. De plus, pour un nombre 2-adique γ qui n'est pas un entier relatif, le mot bi-infini

$$\widetilde{T^{\overline{\gamma}}(Z)} \cdot T^{\gamma}(Z)$$

où $\overline{\gamma} = -1 - \gamma$ est le complémentaire de γ, est une orbite de Zimin, et elles sont toutes de cette forme.

Nous poursuivons notre étude des intéractions entre la théorie de Ramsey et la combinatoire des mots via l'étude d'une nouvelle conjecture concernant cette fois-ci l'existence de factorisations de suffixes d'un mot infini x, soumise à la condition que la concaténation ordonnée de termes de cette factorisation soit monochromatique. Nous conjecturons ainsi que :

Conjecture 2. *Soit x un mot infini sur un alphabet* $\mathbb{A}$*. Alors x est ultimement périodique si et seulement si, pour toute coloration des mots finis sur* $\mathbb{A}$*, il existe un suffixe y admettant une factorisation $y = u_1u_2u_3\cdots$ telle que la famille des mots $(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 1, n_1<n_2<\cdots<n_k}$ soit monochromatique.*

Nous proposons une étude de cette conjecture, ainsi que le résultat selon lequel, pour toute coloration des mots finis sur $\mathbb{A}$, on peut trouver un élément y de l'orbite dynamique de x satisfaisant la condition de factorisations de la conjecture. Ce type d'étude vise à mettre en évidence les limites de la théorie de Ramsey, en construisant des colorations empêchant l'existence de certaines sous-structures monochromatiques.
Afin de développer cette étude, nous montrons que cette conjecture est validée pour certains mots infinis, et nous construisons les premiers exemples venant valider cette conjecture :

Théorème 15. *Les mots infinis sans suffixes récurrents satisfont la conjecture énoncée. Les mots de Zimin et Doubling- Period aussi, et une solution optimale à deux couleurs existe. Les mots infinis sans facteurs carrés arbitrairement grands vérifient la conjecture, et une solution à trois couleurs existe.*

Nous introduisons entre autre la notion de longueur consécutive, définie pour un facteur u d'un mot infini x comme la longueur maximale d'une factorisation de u dont les termes ont leurs premières occurrences dans x correspondante à la